SESSION DE 1988

# COMPOSITION D'ANALYSE

DURÉE : 6 heures

*Calculatrice électronique de poche — y compris calculatrice programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.*

*Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et de la clarté des solutions.*

## PRÉAMBULE

Le but du problème est l'étude du comportement asymptotique de certaines solutions d'équations différentielles linéaires.

Dans tout le problème on fixe un réel $x_0 > 0$ et les applications étudiées sont définies sur $[x_0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Soit $k$ un entier naturel ; on rappelle qu'une application est de classe $\mathscr{C}^k$ lorsqu'elle est $k$ fois dérivable et que sa dérivée $k$-ième est continue.

On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des applications continues de $[x_0, +\infty[$ dans $\mathbb{C}$ et on note $\mathscr{B}$ l'ensemble des applications continues et bornées de $[x_0, +\infty[$ dans $\mathbb{C}$.

Soit $f$ un élément de $\mathscr{C}$. On dit que $f$ admet un développement asymptotique (en abrégé DAS) en $+\infty$ lorsqu'il existe une suite de complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, quand $x$ tend vers $+\infty$, on a pour tout naturel $n$ :

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right),$$

c'est-à-dire que :

$$\lim_{x\to+\infty} x^n \left( f(x) - a_0 - \frac{a_1}{x} - \cdots - \frac{a_n}{x^n} \right) = 0.$$

(On rappelle que la notation $o(h(x))$ signifie : une fonction de $x$, $g(x)$, telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_1 \geqslant x_0$ tel que pour tout $x \geqslant x_1$ on a :

$$|g(x)| \leqslant \varepsilon |h(x)|).$$

On note alors cette propriété $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}$, ou

$$f(x) \sim a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \cdots,$$

même si la série $a_n x^{-n}$ est divergente.

Comme on n'étudie ici que les développements asymptotiques en $+\infty$, on parlera de « DAS » en sous-entendant « en $+\infty$ ».

On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des fonctions continues sur $[x_0, +\infty[$ admettant un DAS.

## I. OPÉRATIONS SUR LES DAS

Toutes les applications considérées sont ici éléments de $\mathscr{C}$.

1. Montrer que $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$ et $\mathscr{A} \neq \mathscr{B}$.
2. Soit $f$ un élément de $\mathscr{A}$. Montrer l'unicité des $a_n$ tels que $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}$.
3. Donner un exemple d'application $f$ qui ne s'annule pas sur $[x_0, +\infty[$ et qui admet le DAS à coefficients tous nuls.
4. Que dire du DAS de $f$ lorsque $t \mapsto f\left(\frac{1}{t}\right)$ se prolonge sur $\left[0, \frac{1}{x_0}\right]$ en une fonction $\mathscr{C}^\infty$ ?

Tournez la page S.V.P.

5. Soient $f$ et $g$ dans $\mathscr{A}$. Étudier l'existence des DAS de $f+g, fg, \frac{1}{f}$.

6. Soit $f$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $[x_0, +\infty[$ dans C telle que $f'$ est dans $\mathscr{A}$ :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{-n}.$$

À quelle condition sur les $c_n$ l'application $f$ admet-elle un DAS ? Quels en sont les coefficients ?

## II. Étude de certaines fonctions définies par des intégrales

On note $\Omega$ l'ensemble des $(\alpha, \beta)$ de $\mathbb{C}^2$ tels que $(\operatorname{Re}\alpha > 0)$ ou bien :

$$(\operatorname{Re}\alpha = 0,\ \alpha \neq 0 \text{ et } \operatorname{Re}\beta > 0).$$

Soit $(\alpha, \beta)$ un élément de $\Omega$. On note $a$ (resp. $b$) la partie réelle de $\alpha$ (resp. $\beta$). On pose :

$$\psi_\beta(x) = e^{\alpha x} x^\beta, \qquad J_\beta(x) = \int_{x_0}^{x} \psi_\beta(t)\,dt$$

et

$$Q_\beta(x) = \frac{J_\beta(x)}{\psi_\beta(x)} = \int_{x_0}^{x} e^{\alpha(t-x)} \left(\frac{t}{x}\right)^\beta dt.$$

1. Trouver une relation entre $J_\beta(x)$, $J_{\beta-1}(x)$, $\psi_\beta(x)$, $\psi_\beta(x_0)$.
   On suppose dans 2. et 3. que $a = \operatorname{Re}\alpha > 0$.
2. Montrer que :
$$J_\beta(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha}\psi_\beta(x).$$
(On pourra d'abord traiter le cas où $\alpha$ et $\beta$ sont réels.)
3. Toujours avec l'hypothèse $a = \operatorname{Re}\alpha > 0$, montrer que $Q_\beta$ est dans $\mathscr{A}$ et que :
$$Q_\beta(x) = \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-n+1)}{\alpha^{n+1} x^n}.$$
4. Montrer que dans le cas où $\operatorname{Re}\alpha = 0$ (donc $\alpha \neq 0$, $\operatorname{Re}\beta > 0$), on a : $\lim_{x\to+\infty} Q_\beta(x) = \frac{1}{\alpha}$.

Soit à nouveau $(\alpha, \beta)$ un élément quelconque de $\Omega$ ; on pose : $\varphi_\beta(x) = \frac{1}{\psi_\beta(x)} = e^{-\alpha x} x^{-\beta}$.

5. Montrer la convergence de l'intégrale $\int_x^{+\infty} \varphi_\beta(t)\,dt$, et, notant $I_\beta(x)$ la valeur de cette intégrale, trouver une relation entre $I_\beta(x)$, $I_{\beta+1}(x)$ et $\varphi_\beta(x)$.
   On pose :
$$P_\beta(x) = \frac{I_\beta(x)}{\varphi_\beta(x)} = \int_x^{+\infty} e^{-\alpha(t-x)} \left(\frac{t}{x}\right)^{-\beta} dt.$$
6. On suppose ici $a = \operatorname{Re}\alpha > 0$. Montrer que :
$$\lim_{x\to+\infty} P_\beta(x) = \frac{1}{\alpha},$$
puis montrer que l'application $P_\beta$ est dans $\mathscr{A}$ et expliciter son DAS.
7. Retrouver les résultats du 6. en supposant $\operatorname{Re}\alpha = 0$ (et donc $\alpha \neq 0$ et $b = \operatorname{Re}\beta > 0$).

Tournez la page S.V.P.

## III. Une équation intégrale

On note $\Delta$ l'ensemble des $(x, t)$ de $\mathbb{R}^2$ tels que $x_0 \leqslant x \leqslant t$. Soit K une application continue bornée de $\Delta$ dans C ; on pose :

$$A = \text{Sup}\{|K(x, t)| / (x, t) \in \Delta\}.$$

Pour tout $g$ de $\mathscr{B}$ on pose :

$$\|g\| = \text{Sup}\{|g(t)| / t \geqslant x_0\}.$$

1. Soit $h$ un élément de $\mathscr{B}$ ; montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{K(x, t)\, h(t)}{t^2}\, dt$ est convergente.

On note $(Th)(x)$ la valeur de cette intégrale.

2. Montrer que pour tout $h$ de $\mathscr{B}$, $Th$ est un élément de $\mathscr{B}$ et que $|(Th)(x)| \leqslant A\dfrac{\|h\|}{x}$ pour tout $x \geqslant x_0$.
3. Montrer que $T : h \mapsto Th$ est linéaire continue de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{B}$.

On rappelle que $T^0$ est l'application identique I.

4. Montrer la convergence normale de la série de fonctions $(T^n h)_{n \in \mathbb{N}}$ sur $[x_0, +\infty[$.
5. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} T^n h$ est l'unique élément $g$ de $\mathscr{B}$ tel que $g - Tg = h$.

## IV. DAS de la solution d'un problème du type précédent

On fixe ici un élément $(\alpha, \beta)$ de $\Omega$. On pose, pour tout $(x, u)$ de $\Delta$,

$$L(x, u) = \int_x^u e^{2\alpha(t-u)} \left(\frac{t}{u}\right)^{2\beta} dt.$$

1. Montrer que L est continue sur $\Delta$.
2. Montrer que $(t, u) \mapsto e^{2\alpha(t-u)} \left(\dfrac{t}{u}\right)^{2\beta}$ est bornée sur $\Delta$.
3. Montrer que L est bornée sur $\Delta$. (On pourra introduire

$$L_0(u) = \int_{x_0}^u e^{2\alpha(t-u)} \left(\frac{t}{u}\right)^{2\beta} dt = L(x_0, u)$$

et exprimer L à l'aide de la fonction $L_0$.)

4. Soit $n$ un naturel quelconque. Montrer que $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{L(x, u)}{u^{n+2}}\, du$ admet un DAS. (Même indication que dans 3.)
5. Soit $\rho$ une application continue de $[x_0, +\infty[$ dans C admettant un développement limité à l'ordre $n$ en $+\infty$.

Montrer que $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{L(x, u)\, \rho(u)}{u^2}\, du$ admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en $+\infty$.

Soit F un élément de $\mathscr{A}$. Soit $\lambda$ un complexe quelconque.

6. Montrer qu'il existe une et une seule application $g$, élément de $\mathscr{B}$, telle que, pour tout $x \geqslant x_0$,

$$g(x) = \lambda - \int_x^{+\infty} \frac{F(u)\, L(x, u)}{u^2}\, g(u)\, du,$$

et que $g$ admet un DAS.

7. Montrer que $g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[x_0, +\infty[$ et que : $\displaystyle g'(x) = \int_x^{+\infty} e^{2\alpha(x-u)} \left(\frac{x}{u}\right)^{2\beta} \frac{F(u)\, g(u)}{u^2}\, du$.
8. Montrer que $g'$ admet un DAS.

Tournez la page S. V. P.

## V. Solutions normales de $y'' + qy = 0$

Soit $q$ un élément de $\mathscr{A}$, $q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}$ ; on suppose $a_0 \neq 0$.

Soit $(\mathscr{E})$ l'équation différentielle $y'' + qy = 0$.

On dit que la solution $f$ de $(\mathscr{E})$ est normale lorsqu'il existe $(\alpha, \beta)$ dans $\mathbf{C}^2$ et $g$ dans $\mathscr{A}$ tels que $g'$ est dans $\mathscr{A}$, $\lim_{+\infty} g \neq 0$, et pour tout $x \geqslant x_0$ :

$$f(x) = e^{-\alpha x} x^{-\beta} g(x).$$

On dit que le couple $(\alpha, \beta)$ est normal lorsqu'il existe au moins une solution normale $f$ de $(\mathscr{E})$ qui lui est ainsi associée.

On pose $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{-n}$, avec $c_0 \neq 0$.

1. Déterminer l'équation différentielle $(\mathscr{E}_{\alpha,\beta})$ transformée de $(\mathscr{E})$ par le changement de fonction inconnue :

$$y = e^{-\alpha x} x^{-\beta} z.$$

On suppose maintenant que $(\alpha, \beta)$ est un couple normal et que $f$ est une solution normale de $(\mathscr{E})$ associée. On utilise les notations du préambule de cette partie.

2. Montrer que $g''$ est dans $\mathscr{A}$.

3. Montrer que $(\alpha, \beta)$ vérifie (S) $\begin{cases} \alpha^2 = -a_0, \\ 2\alpha\beta = -a_1, \end{cases}$ les coefficients $c_n$ du DAS de $g$ étant alors définis par une relation de récurrence à préciser. Que peut-on dire de l'ensemble des suites $(c_n)$ vérifiant cette relation ?

4. Montrer qu'il existe exactement deux couples $(\alpha, \beta)$ vérifiant (S) et discuter leur appartenance à $\Omega$.

## VI. Développement des solutions de $(\mathscr{E})$

On suppose désormais l'application $q$ telle qu'il existe un et un seul élément de $\Omega$ qui soit solution de (S), et on note $(\alpha, \beta)$ cet élément.

1. Montrer que $(\mathscr{E}_{\alpha,\beta})$ peut s'écrire :

$$\frac{d}{dx}\left(\varphi(x)\frac{dz}{dx}\right) + \frac{\varphi(x)}{x^2} F(x) z = 0,$$

où $\varphi$ est l'application $x \mapsto e^{-2\alpha x} x^{-2\beta}$, et F est un élément de $\mathscr{A}$ à préciser.

On note encore L la fonction définie en IV. Soit $g$ une solution bornée de $(\mathscr{E}_{\alpha,\beta})$. Soit $(x, X)$ un élément de $\Delta$.

2. Montrer que :

*a.* $\varphi(X) g'(X) - \varphi(x) g'(x) = -\int_x^X \frac{\varphi(t) F(t) g(t)}{t^2} dt$ ;

*b.* $\varphi g'$ a une limite $l$ en $+\infty$ ;

*c.* $g'$ tend vers 0 en $+\infty$

$$\left(\text{on pourra d'abord montrer qu'il existe M tel que : } \left| g'(x) - \frac{l}{\varphi(x)} \right| \leqslant \frac{M}{x}\right);$$

*d.* $g'(x) = \int_x^{+\infty} \frac{F(t) g(t)}{t^2} e^{2\alpha(x-t)} \left(\frac{x}{t}\right)^{2\beta} dt.$

**Tournez la page S.V.P.**

3. Montrer que :

   *a.* $g(X) - g(x) = g'(X)\,L(x, X) + \int_x^X \frac{L(x, t)\,F(t)\,g(t)}{t^2}\,dt$;

   *b.* $g$ a une limite $\lambda$ en $+\infty$, et :

$$g(x) = \lambda - \int_x^{+\infty} \frac{L(x, t)\,F(t)\,g(t)}{t^2}\,dt.$$

4. Montrer que $(\mathscr{E})$ admet une et une seule solution normale bornée $f$, à un facteur multiplicatif près.
5. Montrer que toute solution de $(\mathscr{E})$ non du type précédent et non nulle est normale non bornée. [On pourra dans $(\mathscr{E})$ effectuer le changement de fonction $y = fw$ où $f$ est normale bornée non nulle.]

## VII. Un exemple

Soit $m$ un réel strictement supérieur à $-2$ ; soit $\lambda$ un complexe de partie réelle strictement positive.
Soit $(\mathscr{E}_0)$ l'équation différentielle $y'' - \lambda^2 x^m y = 0$.

1. On effectue le changement de variable :

$$t = \int_0^x u^{\frac{m}{2}}\,du$$

et le changement de fonction inconnue $y = x^{-\frac{m}{4}} z$.

Montrer que $(\mathscr{E}_0)$ se transforme en : $(\mathscr{E}_1)\ \frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{k}{t^2} - \lambda^2\right) z = 0$,

où la constante $k$ est à préciser.

2. Indiquer les coefficients des DAS intervenant dans les solutions de $(\mathscr{E}_1)$.
3. Traiter complètement l'exemple $y'' - xy = 0$.
   On obtient donc des fonctions :

$$f(x) = ce^{-\alpha x} x^{-\beta} g(x) \quad \text{avec} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{-n}.$$

Étudier pour chacune la convergence de la série entière de terme général $c_n t^n$.

• • •
•

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail